

摘要

本文围绕 p 进 Mal'cev-Neumann 域 $\mathbb{L}_p$ 的构造与性质展开研究。文章首先对比两条完备化链：经典的 $\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{Q}_p^a \subset \mathbb{C}_p$ 与形式幂级数链 $K(x) \rightarrow K((x)) \rightarrow K\langle\langle x \rangle\rangle \rightarrow L[\mathbb{Q}, K] \rightarrow K((\mathbb{Q}))$ ，指出后者在 Hahn 域 $K((\mathbb{Q}))$ 出现自然“顶点”，从而引出位于 $\mathbb{C}_p$ 之上的更大球面完备域—— p 进 Mal'cev-Neumann 域。接着在一般有序群 G 与离散赋值环 $A = W(\mathbb{F}_p)$ 上构造商域 $A((G))/N$ ，特别给出 $\mathbb{L}_p = W(\overline{\mathbb{F}_p})((\mathbb{Q}))/N$ ，并证明其赋值群为 G ，剩余类域为 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 。利用 Kaplansky-Poonen 技巧与超限牛顿算法，证明 $\mathbb{L}_p$ 既代数闭又完备，且在赋值意义下达到极大完备，从而不存在真即时扩张。进一步阐明球面完备、伪完备与极大完备三者在非阿基米德赋值域中的等价关系，确认 $\mathbb{L}_p$ 的球面完备性。最后将 p 进对数 $\log_p$ 延拓至 $\mathbb{L}_p$ ，展示其在无穷级数展开与超越性问题中的适用性，并讨论 Ingleton 定理与多重选择原理 $\text{MC}(p)$ 的逻辑联系。结果表明， $\mathbb{L}_p$ 为研究赋值泛函分析及其公理基础提供了统一而完备的理论平台。

关键字： p 进数，域扩张，Mal'cev-Neumann 域，极大完备，球面完备，Ingleton 定理

Abstract

This paper focuses on the construction and properties of the p -adic Mal'cev-Neumann field $\mathbb{L}_p$. It first contrasts two completion chains: the classical $\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{Q}_p^a \subset \mathbb{C}_p$ and the formal-series chain $K(x) \rightarrow K((x)) \rightarrow K\langle\langle x \rangle\rangle \rightarrow L[\mathbb{Q}, K] \rightarrow K((\mathbb{Q}))$, noting that the latter attains a natural “apex” at the Hahn field $K((\mathbb{Q}))$. This motivates a larger spherically complete domain above $\mathbb{C}_p$ —namely, the p -adic Mal'cev-Neumann field. Next, given an ordered abelian group G and the discrete valuation ring $A = W(\mathbb{F}_p)$, a quotient field $A((G))/N$ is built; in particular, $\mathbb{L}_p = W(\overline{\mathbb{F}_p})((\mathbb{Q}))/N$ is obtained, whose value group is G and residue field is $\overline{\mathbb{F}_p}$. Using Kaplansky-Poonen techniques and a transfinite Newton process, it is shown that $\mathbb{L}_p$ is algebraically closed and complete, and maximally complete in the valuation sense, hence admits no proper immediate extension. Further, spherical completeness, pseudo-completeness, and maximal completeness are proved equivalent for non-Archimedean valued fields, confirming the spherical completeness of $\mathbb{L}_p$. Finally, the p -adic logarithm $\log_p$ is extended to $\mathbb{L}_p$, illustrating its suitability for infinite-series expansions and transcendence problems; the logical relation between the Ingleton theorem and the multiple-choice principle $\text{MC}(p)$ is also explored, underscoring $\mathbb{L}_p$ as a unified and complete platform for valuation-theoretic functional analysis and its set-theoretic foundations.

Keywords: p -adic numbers, field extensions, Mal'cev-Neumann field, maximal completeness, spherical completeness, Ingleton theorem

目录

1	p-adic extension.....	1
2	Ultrametric space	4
3	广义形式幂级数扩张.....	7
4	p-adic Malcev-Neumann field.....	14
5	p 进 Malcev-Neumann 域的极大性	19
6	p 进 Malcev-Neumann 域的进一步性质.....	25
7	参考文献	29
	本科生毕业论文（设计）任务书	31
	本科生毕业论文（设计）考核	33

1 p-adic extension

在展开本章的技术细节之前，回顾一下基础的 **p-adic** 的知识，前置知识参考^[1]：对固定素数 p ，为有理数域 $\mathbb{Q}$ 赋予 p -进绝对值 $|\cdot|_p := p^{-\text{ord}_p(\cdot)}$ ，再行完备化便得到局部域 $\mathbb{Q}_p$ 。这种构造与 $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 的经典完备化类似，却因满足超距不等式而呈现出截然不同的拓扑与代数结构，为后续的 p -进分析乃至 p 进 Malcev-Neumann 扩张奠定了最基本的框架。本小节从 $\mathbb{Q}_p$ 开始，简单介绍如何一步步构造出 **p-adic Malcev-Neumann field**。

定理 1.1 (SWH85(Thm16.6)^[2]). $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包 $\mathbb{Q}_p^a$ 在度量意义下不是完备的。

证明. 令 $n \in \mathbb{N}$ ，定义

$$H_n := \{x \in \mathbb{Q}_p^a : \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(x) \leq n\}$$

其中 $\mathbb{Q}_p(x)$ 表示包含 $\mathbb{Q}_p$ 与 x 的最小子域， $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(x)$ 表示该子域在 $\mathbb{Q}_p$ 上的向量空间维数。

显然有 $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ ，且 $\bigcup_n H_n = \mathbb{Q}_p^a$ 。我们分步证明如下：

(i) 对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，集合 H_n 是闭集。设 $x_1, x_2, \dots \in H_n$ ，且 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ 。对于每个 i ，存在系数 $a_0^i, a_1^i, \dots, a_{n-1}^i \in \mathbb{Z}_p$ ，使得 $\max_j |a_j^i|_p = 1$ ，且满足：

$$a_0^i + a_1^i x_i + \cdots + a_{n-1}^i x_i^{n-1} = 0.$$

由于 $\mathbb{Z}_p$ 是紧的，我们可取一子列，使得对 $j = 0, \dots, n-1$ 有极限：

$$a_j := \lim_{i \rightarrow \infty} a_j^i \in \mathbb{Z}_p.$$

从而有 $\max\{|a_j|_p : 0 \leq j \leq n-1\} = 1$ ，故 $a_0, \dots, a_{n-1}$ 不全为零，并满足：

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = 0.$$

由此可知 $x \in H_n$ ，即 H_n 为闭集。

(ii) 对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，都有 $H_n \neq \mathbb{Q}_p^a$ 。我们构造一个元素 $x \in \mathbb{Q}_p^a$ ，使得 $\mathbb{Q}_p(x)$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上维数为 $m > n$ 。设 x 为某个 $x^m = p$ 的解。对任意线性组合

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}$$

其中 $a_i \in \mathbb{Q}_p$, 我们有 (利用 $|x| = \sqrt[n]{|p|}$):

$$\text{若 } a_i \neq 0, a_j \neq 0, i \neq j, \text{ 则 } |a_i x^i| \neq |a_j x^j|.$$

从而可得:

$$|a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}| = \max \{|a_j|_p \cdot |x|^j : 0 \leq j \leq m-1\}.$$

因此 $1, x, \dots, x^{m-1}$ 在线性意义上是 $\mathbb{Q}_p$ 上的无关集, 说明 $x \notin H_n$.

(iii) 对所有 $m, n \in \mathbb{N}$, 有 $H_m + H_n \subset H_{mn}$. 设 $x \in H_n, y \in H_m$. 令 $\tilde{m} := \dim_{\mathbb{Q}_p(x)} \mathbb{Q}_p(x, y)$, 则由代数基本定理有:

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(x + y) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(x, y) = \tilde{m} \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(x) \leq mn.$$

因此 $x + y \in H_{mn}$.

(iv) $\mathbb{Q}_p^a$ 非完备. 由 Baire 类定理 (即完备度量空间是 Baire 空间), 若 $\mathbb{Q}_p^a$ 是完备空间, 则某个 H_n 应当包含一个球:

$$\{x \in \mathbb{Q}_p^a : |x - b| \leq \varepsilon\}$$

其中 $\varepsilon > 0, b \in \mathbb{Q}_p^a$. 任取满足 $|s| \leq \varepsilon$ 的 $s \in \mathbb{Q}_p^a$, 则 $s + b \in H_n$, 从而 $s \in H_n + H_n \subset H_{n^2}$. 于是有 $\mathbb{Q}_p^a \subset H_{n^2}$, 与第 (ii) 步矛盾, 故 $\mathbb{Q}_p^a$ 不完备. $\square$

由上可知, $\mathbb{Q}_p^a$ 虽已代数闭, 但在 p -进绝对值下仍非完备. 为弥补这一度量缺陷, 我们再对其完备化并记为

$$\mathbb{C}_p := \widehat{\mathbb{Q}_p^a}.$$

$\mathbb{C}_p$ 同时包含 $\mathbb{Q}_p^a$ 且在 p -进拓扑下完备. 自然地, 我们接着要问: $\mathbb{C}_p$ 依旧代数闭吗? 幸运的是, 下面的定理给出了肯定答案.

定理 1.2 (SWH85(Thm17.1)^[2]). 设 K 是完备域, L 是其一个稠密的代数闭子域, 则 K 的代数闭包的完备化仍是代数闭的.

证明. 我们以如下形式证明该定理. 设 K 是完备的, L 是一个稠密的代数闭子域. 则每一个首项系数为 1 的多项式

$$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n, \quad (a_0, \dots, a_{n-1} \in K, n \in \mathbb{N})$$

在 K 中有根。

事实上, 对于每个 $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, 我们选择 $a_{ij} \in L$, 使得:

$$|a_{ij} - a_j| < 1/i, \quad |a_{ij}| = |a_j| \quad (i = 1, 2, \dots)$$

令

$$f_i := a_{i0} + a_{i1}X + \dots + a_{in}X^n \in L[X],$$

则 f_i 在 L 中有根 λ_i 。我们有:

$$|\lambda_i^n| = |-(a_{i0} + a_{i1}\lambda_i + \dots + a_{i,n-1}\lambda_i^{n-1})| \leq \max \{|a_{ij}| \cdot |\lambda_i|^j : 0 \leq j \leq n-1\}$$

从而

$$|\lambda_i| \leq \max \left(\sqrt[n]{|a_0|}, \sqrt[n-1]{|a_1|}, \dots, |a_{n-1}| \right) =: c$$

接下来我们估计:

$$|f(\lambda_i)| = |f(\lambda_i) - f_i(\lambda_i)| = \left| \sum_{j=0}^n (a_j - a_{ij}) \lambda_i^j \right| \leq (1/i) \cdot \max(1, |\lambda_i|, |\lambda_i|^2, \dots, |\lambda_i|^n) \leq (1/i) \cdot \max(1, c^n)$$

于是 $\lim_{i \rightarrow \infty} |f(\lambda_i)| = 0$ 。

由于存在 $\xi_1, \dots, \xi_n \in K^a$, 使得

$$f(x) = a(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n), \quad (x \in K),$$

其中 $a \neq 0$ 。

由 $\lim_{j \rightarrow \infty} |f(\lambda_j)| = 0$ 可知, $\{\lambda_j\}$ 中存在一个子列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, 收敛于某个 ξ_j 。

由于 K 是完备域, 因此 $\xi_j \in K$, 说明 f 在 K 中有根。 $\square$

基于上述定理, 我们立即得到下列推论:

推论 1.3 (SWH85(Cor17.2)^[2]). 设 $\mathbb{C}_p$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包的完备化, 则 $\mathbb{C}_p$ 满足以下性质:

- (i) $\mathbb{C}_p$ 是代数闭域;
- (ii) $\mathbb{C}_p$ 作为 $\mathbb{Q}_p$ 上的向量空间是无限维的;
- (iii) $\mathbb{C}_p$ 不是局部紧的;

(iv) $\mathbb{C}_p$ 是可分的;

(v) $\mathbb{C}_p$ 的剩余类域是有限域 $\mathbb{F}_p$ 的代数闭包;

(vi) $\mathbb{C}_p$ 的赋值群为 $\{p^r : r \in \mathbb{Q}\}$ 。

备注 1.4. 尽管 $\mathbb{C}_p$ 与 $\mathbb{C}$ 在赋值域 (valued field) 的结构上有很大不同, 但可以证明它们作为域是同构的。设 $\mathfrak{c}$ 为连续统的势 (即实数集的基数)。

令 S 是 $\mathbb{C}_p$ 中在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关的元素的极大子集, 其中 $\mathbb{C}_p$ 是 $\mathbb{Q}(S)$ 的代数闭包。

因此, 有:

$$\#\mathbb{Q}(S) = \#\mathbb{C}_p.$$

我们可以不难看出: $\#\mathbb{C}_p = \mathfrak{c}$ 。一方面, $\#\mathbb{C}_p \leq \mathfrak{c}$, 因为 $\mathbb{C}_p$ 是可分度量空间; 另一方面, $\#\mathbb{C}_p \geq \mathfrak{c}$, 因为映射

$$A \mapsto \sum_{n \in A} p^n$$

是从所有自然数子集 $\{A \subseteq \mathbb{N}\}$ 到 $\mathbb{C}_p$ 的一个单射 (注: 该集合的势为 $\mathfrak{c}$)。

因此, $\#\mathbb{Q}(S) = \mathfrak{c}$, 进而 $\#S = \mathfrak{c}$ 。

用相同的推理, 复数域 $\mathbb{C}$ 中, 取其某子集 T 使得 $\#T = \mathfrak{c}$, 且元素在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关, 则 $\mathbb{Q}(T)$ 的代数闭包也等势于 $\mathbb{Q}(S)$, 从而两者同构。

因此, $\mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}$ (即这两个代数闭域是同构的)。

由此可见, 在复数域 $\mathbb{C}$ 上存在许多不同的赋值, 使得 $\mathbb{C}$ 成为完备赋值域。

2 Ultrametric space

上一节我们回顾了 $\mathbb{Q} \xrightarrow{|\cdot|_p} \mathbb{Q}_p$ 、其代数闭包 $\mathbb{Q}_p^a$ 以及最终的完备代数闭域 $\mathbb{C}_p$, 并简单介绍了 $\mathbb{C}_p$ 的基本拓扑与赋值结构。本章将正式从一般视角出发, 介绍超度量空间与球面完备性的概念与性质, 并为后续“最大完备性”及 p 进 Malcev-Neumann 域等主题奠定基础。

定义 2.1. 一个度量空间 (X, d) 被称为一个超度量空间 (ultrametric space), 如果度量 d 满足所谓的强三角不等式 (strong triangle inequality):

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)), \quad \text{其中 } x, y, z \in X.$$

定义 2.2. 设 X 是一个度量空间。如果对任意数列 $x_1, x_2, \dots \in X$ 、 $y_1, y_2, \dots \in X$ ，若

$$d(x_1, y_1) > d(x_2, y_2) > \dots$$

成立，则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

则称 X 上的度量是离散的 (discrete)。

定义 2.3. 设 X 是一个度量空间。若对 X 中的每个球 B ，集合

$$\{d(x, y) \mid x, y \in B\}$$

在区间 $[0, d(B)]$ 中稠密，则称该度量在 X 上是稠密的。

定义 2.4. 一个超度量空间被称为球面完备 (spherically complete)，如果任意嵌套的球序列都有非空交集。

备注 2.5. 设 $a \in X$, $r \in (0, \infty)$ 。以 a 为中心、 r 为半径的“开球”定义为：

$$B_a(r^-) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

以 a 为中心、 r 为半径的“闭球”定义为：

$$B_a(r) := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$$

在 X 中，一个“球”是形如 $B_a(r^-)$ 或 $B_a(r)$ 的集合 ($a \in X, r > 0$)。尽管将 $B_a(r^-)$ 与 $B_a(r)$ 称为开球或闭球是很自然的，但这些“开”、“闭”、“半径”、“中心”在超度量空间中具有一定的歧义，而这由下面的命题所揭示。

命题 2.6 (SWH85(Prop18.4)^[2])。在超度量空间中，任一球是开集也是闭集。每个点都可以作为该球的中心；一个球甚至可能对应无穷多个半径。

证明. 设 $a \in X$, $r \in (0, \infty)$ 。由于强三角不等式， $d(x, y) < r$ 在 X 上定义了一个等价关系，其中每个等价类是开集。因此， $B_a(r^-)$ 是开集，补集是等价类并集，所以闭集。即 $B_a(r^-)$

是开也是闭的。类似地, $B_a(r)$ 显然是闭集, 接下来说明它也是开集。设 $b \in B_a(r)$, 我们要证明 $B_b(r^-) \subseteq B_a(r)$ 。若 $x \in B_b(r^-)$, 则

$$d(x, a) \leq \max(d(x, b), d(b, a)) \leq r,$$

所以 $x \in B_a(r)$, 即 $B_b(r^-) \subseteq B_a(r)$ 。

类似, 我们有 $B_b(r) \subseteq B_a(r)$ 。由对称性可得 $B_a(r) \subseteq B_b(r)$, 因此两者相等, 说明每个 $B_a(r)$ 中的点都可以作为中心。同理可证 $B_a(r^-)$ 中每点也是其中心。

特别地, 如果 $r \in (1, p)$ 且 p 是素数, 则在 $\mathbb{Q}_p$ 中有:

$$B_0(1) = B_0(r) = B_0(r^-)$$

即单位球拥有无穷多可能半径。 □

一个超度量空间是完备的, 当且仅当任意嵌套的球序列

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$$

满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n) = 0$ 时, 其交集非空。

如果去掉 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n) = 0$ 这个条件, 即为球面完备的。因此我们很自然的看到, 球面完备 $\Rightarrow$ 完备。也可以注意到超度量空间是紧致的 (即所有闭球都是紧的), 则它必然球面完备。事实上我们有如下命题:

命题 2.7 (SWH85(Prop20.2)^[2]). 若一个完备的超度量空间 X 上的度量是离散的 (*discrete*), 则 X 是球面完备的 (*spherically complete*)。

证明. 设 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ 是一列嵌套的球。我们可以假设 $B_n \neq B_{n+1}$ 对所有 n 都成立。

由度量的离散性, 我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n) = 0.$$

由于 X 是完备空间, 因此这些球的交集是非空的。 □

接下来我们会看到, 存在超度量空间虽然完备, 却不是球面完备的, 一个典型的例子就是 $\mathbb{C}_p$ 。

定理 2.8 (SWH85(Thm20.5)^[2]). 若一个可分超度量空间上的度量是稠密的 (*dense*), 则该空间不是球面完备的 (*spherically complete*).

证明. 设 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 是空间 X 的一个可数稠密子集. 选取一系列实数 $r_0, r_1, \dots$, 满足

$$r_0 > r_1 > \dots > \frac{1}{2}r_0, \quad r_0 = d(a, b) \text{ for some } a, b \in X.$$

考虑由公式 $d(x, y) \leq r_1$ 所定义的等价关系, 它将 X 分为至少两类 (可能有无穷多类), 每个类对应一个球. 由于 X 是稠密的, 这些球中至少有一个 (记为 B_1) 不包含点 a_1 , 且 $d(B_1) = r_1$.

由于 B_1 仍是稠密空间, 我们可以在其中继续选出一个直径为 r_2 的子球 $B_2 \subset B_1$, 且不包含 a_2 , 以此类推构造出一列球:

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots$$

使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有:

$$d(B_n) = r_n, \quad a_n \notin B_n.$$

若 $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$, 那么其交集至少将包含一个直径 $\frac{1}{2}r_0$ 的球 B . 但由于每个 $a_n \notin B_n$, 可得 $\{a_n\}$ 不在 B 中. 然而 $\{a_n\}$ 是稠密的, 这与 B 为开集矛盾.

因此交集为空, 说明 X 不是球面完备的. □

由上述定理, 我们立刻得到:

推论 2.9. $\mathbb{C}_p$ 不是球面完备的 (*spherically complete*).

3 广义形式幂级数扩张

为了引入 Malcev-Neumann rings 我们需要先介绍一个与 $\mathbb{C}_p$ 类似的扩张. 考虑赋值域 $(K(x), |\cdot|_p)$, 其中 $p \in K[x]$ 是一个不可约多项式, K 是一个域. 在这种情况下, p 是赋值 $|\cdot|_p$ 的一个标准化元 (uniformizer).^[3]

定义 3.1. 设 K 是一域, $p = x \in K[x]$. 赋值域 $(K(x), |\cdot|_p)$ 的完备化称为形式洛朗级数域 (field of formal Laurent series), 记作 $K((x))$.

这里 x 是 $(K(x), |\cdot|_x)$ 的一个标准化元 (uniformizer), 且 K 是其赋值域的剩余类域 (residue field)。因此在 $K((x))$ 中, x 依然是标准化元, K 仍作为其剩余类域。类似于 $\mathbb{Q}_p$ 该域具有如下结构描述, 可以参考^[1]:

$$K((x)) = \left\{ \sum_{i=v}^{\infty} r_i x^i : v \in \mathbb{Z}, r_i \in K, r_v \neq 0 \right\} \cup \{0\},$$

其中对 $K((x))$ 上的赋值定义为

$$\left| \sum_{i=v}^{\infty} r_i x^i \right| = e^{-v}, \quad \text{当 } r_v \neq 0, \quad \text{且 } |0| = 0.$$

以 0 为中心、1 为半径的闭球为:

$$K[[x]] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i : r_i \in K \right\}$$

被称为形式幂级数环 (ring of formal power series)。

定义 3.2. 设 K 是一域, 定义如下集合:

$$\begin{aligned} K\langle\langle x \rangle\rangle &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} K\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right) \\ &= \left\{ \sum_{i=v}^{\infty} r_i x^{\frac{i}{n}} : v \in \mathbb{Z}, r_i \in K, r_v \neq 0, \text{ for some } n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

我们约定:

$$x^{\frac{\ell p}{\ell q}} := \left(x^{\frac{p}{q}}\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}$$

在此约定下, $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 是一个域。事实上, 若 $f \in K\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)$ 、 $g \in K\left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)\right)$, 则二者都可视为 $K\left(\left(x^{\frac{1}{nm}}\right)\right)$ 的元素, 因此它们的加法和乘法在该域中有定义, 从而在 $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 中也有定义。

这种形式的域 $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 被称为 **Puiseux 级数域 (Puiseux series field)**。^[3] $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 与 $K((x))$ 有如下关系:

定理 3.3 (ED13(Cor13.15)^[4]). 设 k 是一个特征为 0 的代数闭域, 则:

1. 洛朗级数域 $k((x))$ 的代数闭包是域 $\bigcup_{n=1}^{\infty} k\left(\left(x^{1/n}\right)\right)$;
2. 幂级数环 $k[[x]]$ 在 $k\left(\left(x^{1/n}\right)\right)$ 中的整闭包为 $k[[x^{1/n}]]$ 。

证明. 设 L 是 $k((x))$ 的任意有限扩域. 我们将证明, $k[[x]]$ 在 L 中的整闭包 T 具有如下形式:

$$T = k[[x^{1/n}]] \quad \text{for some } n$$

于是可得 $L = k((x^{1/n}))$, 从而推出第 (1) 条, 而第 (2) 条则自动成立. 由于 $k[[x]]$ 是一个 **noetherian normal domain** 从而有 T 是 $k[[x]]$ 上的有限扩张. 进一步, T 是有限个完备局部整环的直积. 由于 T 是整环, 因此它是局部环. 进一步, T 是 1 维整环. 由 **Serre** 判别准则可知 T 是一个离散赋值环 (**DVR**). 记 π 为 T 中极大理想的一个生成元.

对某个 n , 可将 x 写为 $x = u\pi^n$, 其中 u 是 T 中的单位元. 因为 T 在 $k[[x]]$ 上有限, 故其剩余类域是 k 上有限扩域; 但 k 是代数闭域, 所以剩余类域也为 k . 因此单位 u 在剩余类域 $T/(\pi) \cong k$ 中的像 $\bar{u}$ 也属于 k , 而 k 是代数闭域, 故存在某个 $\bar{v} \in k$ 使得 $\bar{v}^n = \bar{u}$. 由于 $\text{char}(k) = 0$, 多项式 $t^n - \bar{u}$ 在 $\bar{v}$ 处具有单根. 根据 **Hensel** 引理, $\bar{v}$ 可 lift 到 T 中的某个元 v , 使得 $v^n = u$. 令 $\pi' := v\pi = x^{1/n}$, 则 π' 也是 T 中极大理想的生成元.

考虑映射 $k[[x]] \rightarrow T$, 将 x' 送到 π , 这是个满射, 又由于 T 维数为 1, 该映射是同构. 因此 $T \cong k[[x^{1/n}]]$, 证毕. $\square$

备注 3.4. 这个证明用到较多代数几何与交换代数的细节, 其中证明过程中对 T 性质的一步步深入和最后的同构, 细节可以参考^[4]. 本文将不做深入展开.

由上述定理, 我们很自然的会将 $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 类比为 $\mathbb{Q}_p^a$, 因此我们很自然会去寻找 $\mathbb{C}_p$ 的类比是什么, 而这由下面给出:

定理 3.5 (AVR79(Thm1.3)^[5]). 设 F 是一个域, $G \subseteq \mathbb{R}$ 是一个加法子群. 那么存在一个非阿基米德赋值域 K , 域 K 在度量意义下是完备的, 且使得它的剩余类域同构于 F , 赋值群为:

$$\{e^s : s \in G\}$$

证明. 定义集合族 $\mathcal{S}$ 为:

$$\mathcal{S} := \{S \subseteq G : \text{for every } s \in \mathbb{R}, S \cap (-\infty, s) \text{ 是有限集}\}.$$

此集合满足以下性质:

- i. $\{s\} \in \mathcal{S}$, 对于所有 $s \in G$;

- ii. 若 $S \in \mathcal{S}$ 且 $S \neq \emptyset$, 则 S 有最小元;
- iii. 若 $T \subseteq S, S \in \mathcal{S}$, 则 $T \in \mathcal{S}$;
- iv. 若 $S, T \in \mathcal{S}$, 则 $S \cup T \in \mathcal{S}$;
- v. 若 $S, T \in \mathcal{S}$, 则 $S + T := \{s + t : s \in S, t \in T\} \in \mathcal{S}$;
- vi. 若 $S, T \in \mathcal{S}$, 且 $u \in G$, 则仅有有限多个 $s \in S$ 使得 $u - s \in T$;
- vii. 若 $S \subseteq G$, 且存在一列 $a_n \rightarrow \infty$, 满足 $S \cap (-\infty, a_n) \subseteq S$, 则 $S \in \mathcal{S}$ 。

定义向量空间 K 为所有从 $G \rightarrow F$ 的函数 f , 使得其支集 $\text{supp } f := \{s : f(s) \neq 0\} \in \mathcal{S}$ 。

令 e_s 为特征函数, 表示在 $s \in G$ 处取值为 1, 其它为 0。那么 $e_s \in K$, 并且 K 是 F -向量空间。

在 K 上定义乘法为:

$$(f * g)(u) := \sum_{s \in G} f(s)g(u - s).$$

由前述条件可知该乘法封闭, 并且交换, 单位元为 e_0 。

我们现在证明 K 是一个域。取非零 $f \in K$, 设其支集最小元为 s_0 。我们构造 g 使得 $f * g = 1$ 。不失一般性, 我们可令 $s_0 = 0$ (乘以常数 e_{-s}), 并且自然我们可令 $f(0) = 1$ 。

令 $S := \text{supp } f$, $[S]$ 为 $S \subseteq (0, \infty)$ 生成的子半群, 通过上述性质, 考虑 $S + \dots + S$ 容易证明 $[S] \in \mathcal{S}$ 。

令 $g(0) = 1$, 在 $[S]$ 上递归定义 $g(u)$, 满足:

$$g(u) = - \sum_{s \in G, s > a} f(s)g(u - s),$$

其中 $a > 0$ 为 $S \setminus \{0\}$ 中的最小值。

由此定义的 g 满足 $f * g = 1$, 从而 K 是域。

对于 $f \neq 0$ 定义赋值 $r(f) := \min \text{supp } f$, 赋值函数为:

$$|f| := e^{-r(f)}, \quad |0| := 0.$$

这是一个非阿基米德赋值, 其值群为 $\{e^s : s \in G\}$ 。

映射 $f \mapsto f(0)$ 是一个满射 $\{f \in K : |f| \leq 1\} \rightarrow F$ 的环同态, 其核为 $\{f \in K : |f| < 1\}$ 。因此剩余类域是 F , 赋值群为 $\{e^s : s \in \Sigma\}$ 。

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ 为一列递减且趋于 0 的正数, 又设 $f_1, f_2, \dots$ 为 K 中的一个序列, 满足

$$|f_i - f_j| \leq \varepsilon_n, \quad \text{一旦 } i, j \geq n.$$

从而

$$f_i = f_j \quad \text{在区间 } (-\infty, -\log \varepsilon_n) \quad (i, j \geq n).$$

因此存在映射 $f : G \rightarrow F$, 使得对每个 n 都有

$$f = f_n \quad \text{在 } (-\infty, -\log \varepsilon_n) \text{ 上}.$$

根据上述性质进一步有

$$|f - f_n| \leq \varepsilon_n, \quad \forall n.$$

于是 $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, 从而证明了域 K 的度量完备性。 □

由上述定理, 我们就有如下的域:

定义 3.6. 设 K 是任意域, G 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的一个子群。定义:

$$L[G, K] := \{f : G \rightarrow K \mid \text{对每个 } n \in \mathbb{Z}, \text{supp}(f) \cap (-\infty, n) \text{ 是有限集}\}$$

称这种形式的域为 **Levi-Civita 域**

通过取 $G = \mathbb{Q}$, $L[\mathbb{Q}, K]$ 正是我们要找的 $\mathbb{C}_p$ 的类比, 如下:

定理 3.7 (BAK18(Thm4.10)^[3]). 若 K 是任意域, 则 $L[\mathbb{Q}, K]$ 是赋值空间 $(K\langle\langle x \rangle\rangle, |\cdot|)$ 的完备化。

为证明定理 3.7, 最简洁的做法是先寻一个足够大的“包络域”, 把 $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 以及其中涉及的 Levi-Civita 域 $L[\mathbb{Q}, K]$ 等统统嵌入其中, 再在这一统一视角下检验完备性。事实证明, Hahn 域正好提供了这样一个清晰而灵活的舞台。

定义 3.8. 设 K 是一个域（不要求有序）， G 是一个有序阿贝尔群。定义集合：

$$K((G)) := \{f : G \rightarrow K \mid \text{supp}(f) \text{ 是良序集}\},$$

其中 $\text{supp}(f) := \{x \in G : f(x) \neq 0\}$ 。

定义加法与乘法如下，

1. $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$
2. $(fg)(x) := f * g(x) = \sum_{a+b=x} f(a)g(b)$

可以证明， $K((G))$ 构成一个域。这种形式的域被称为一般 Hahn 域 (general Hahn fields)。

定义 3.9. 一个 Hahn 域是一个一般 Hahn 域 $K((G))$ ，其中 G 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的一个子群， K 是任意域。

定理 3.10 (BAK18^[3]). 对任意 G 是一个有序阿贝尔群， $K((G))$ 构成一个域。若进一步设 G 是 $(\mathbb{R}, +)$ 的一个子群， K 还是任意域。定义赋值函数 $|\cdot| : K((G)) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为：

$$|f| := \begin{cases} e^{-\min \text{supp}(f)}, & f \neq 0, \\ 0, & f = 0. \end{cases}$$

则 $(K((G)), |\cdot|)$ 是一个 *Cauchy* 完备的非阿基米德赋值域，且：

- 剩余类域同构于 K ；
- 赋值群为 $|K((G))^*| = \{e^g : g \in G\} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ ；
- 且它是球面完备的 (*spherically complete*)。

证明. 该定理的前半部分证明与定理3.5基本一致。如果想知道具体证明细节可以参考^[3]，或者更全面更详细的参考资料^{[6][7][8][9][2]}所以，我们只证明它是球面完备的这部分。即证 $K((G))$ 是球面完备的。设

$$B_n := \{f \in K((G)) : |f - f_n| \leq r_n\}, \quad \text{其中 } r_1 > r_2 > \cdots.$$

令 $-\log r_1 < -\log r_2 < \cdots$

若 $x \in G$, $x < -\log r_n$ 且 $m > n$, 因为 $f_m \in B_n$, 所以我们有 $|f_m - f_n| \leq r_n$, 则 $f_m(x) = f_n(x)$

故定义:

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x), & \text{for some } n \text{ 使得 } x < -\log r_n, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

我们断言 $g \in K((G))$, 且 $g \in \bigcap_n B_n$

事实上, 若 $x \in \text{supp}(g)$, 则 $x < -\log r_n$ 对某些 n 成立, 因此存在一个较大的 m , 且对所有 $y \leq x$, 均有 $g(y) = f_m(y)$

设 S 为 $\text{supp } g$ 的非空子集, 则对一个较大的 m , $S \cap (-\infty, -\log r_m)$ 包含在 $\text{supp } f_m$ 中, 因此为有限良序子集。从而 $g \in K((G))$ 。

由构造易得 $|g - f_n| \leq r_n$, 从而 $g \in \bigcap_n B_n$ 。 $\square$

正如之前所说, 我们现在将 $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 以及 Levi-Civita 域 $L[\mathbb{Q}, K]$ 等统统嵌入一个 Hahn field $K((\mathbb{Q}))$ 中。^[10] 首先通过定义很自然可以看到 $L[\mathbb{Q}, K]$ 可以嵌入到 $K((\mathbb{Q}))$ 中。对于 $K\langle\langle x \rangle\rangle$, 我们则设

$$\theta : K\langle\langle x \rangle\rangle \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} K\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}\right), \quad \theta\left(\sum_{i=v}^{\infty} r_i x^{\frac{i}{n}}\right) = \sum_{i=v}^{\infty} r_i d^{\frac{i}{n}},$$

其中

$$d^r(x) = \begin{cases} 1, & x = r, \\ 0, & x \neq r. \end{cases}$$

则 θ 是一个同构, 并且满足

$$|\theta(f)| = |f|, \quad \forall f \in K\langle\langle x \rangle\rangle.$$

因此, $K\langle\langle x \rangle\rangle$ 可以视为 $K((\mathbb{Q}))$ 的一个子域。

备注 3.11. 事实上我们有, 任何超度量空间都可以等距地嵌入到一个非阿基米德赋值 (球完备) 域中。^[2]

定理 3.7 的证明. 注意到有同构:

$$K\langle\langle x \rangle\rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} K\left(\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}\right)\right).$$

且 $L[\mathbb{Q}, K]$ 中的每个元素 f 可写为级数：

$$f = \sum_{i=v}^{\infty} r_i d^{\alpha_i},$$

其中 $v \in \mathbb{Z}$, $r_i \in K$, 且 $(\alpha_i)_i$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的一个严格递增数列, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 集合 $\{\alpha_i : i \geq v\} \cap (-\infty, n]$ 有限。

注意部分和序列 $\sum_{i=v}^n r_i d^{\alpha_i}$ 是 $\bigcup_n K((\frac{1}{n}\mathbb{Z}))$ 中的 Cauchy 列, 其极限为 f 。

因此, 由完备化的性质 $\bigcup_n K((\frac{1}{n}\mathbb{Z}))$ 在 $L[\mathbb{Q}, K]$ 中稠密, 而由定理 3.5, $L[\mathbb{Q}, K]$ 是 Cauchy 完备的, 因此即为完备化。□

4 p-adic Malcev-Neumann field

在上一章中, 我们展示了如下的扩张

$$K(x) \longrightarrow K((x)) \longrightarrow K\langle\langle x \rangle\rangle \longrightarrow L[\mathbb{Q}, K] \longrightarrow K((\mathbb{Q}))$$

最终, 我们抵达了 Hahn 域 $K((\mathbb{Q}))$ 。它不仅囊括了 Levi-Civita 域 $L[\mathbb{Q}, K]$, 而且具备球面完备性, 从而根据 3.11 自然成为该序列的顶点。而与此扩张形成对照的 p -进扩张

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p^a \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

看似止步于 $\mathbb{C}_p$, 但类比上一链的结构, 我们会期待在 $\mathbb{C}_p$ 之上同样存在一个更大的、球面完备的域, 用以统一刻画所有 p -进代数与分析扩张。本章的主题正是这个大域 p -进 Malcev-Neumann 域 (p-adic Malcev-Neumann field)。

在此之前, 我们首先需要介绍一下 Malcev-Neumann 环。

定义 4.1. 设 R 是一个带单位元的交换环 G 是一个有序阿贝尔群。定义集合：

$$R((G)) := \{f : G \rightarrow R \mid \text{supp}(f) \text{ 是良序集}\},$$

其中 $\text{supp}(f) := \{x \in G : f(x) \neq 0\}$ 。

定义加法与乘法如下,

$$1. (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$2. (fg)(x) := f * g(x) = \sum_{a+b=x} f(a)g(b)$$

由此定义的 $R((G))$ 构成一个环，称为 Malcev-Neumann 环 (Malcev-Neumann Rings)。

可以看到，Malcev-Neumann 环与一般 Hahn 域的定义类似，但是却更为一般。并且注意到如果这个环 R 取成域 K ，我们也称为 Malcev-Neumann 域。有上一章的结论 $K((G))$ 的剩余类域为 K 。因此我们认为这种扩张是同特征的扩张。而我们想要构造的 p 进 Malcev-Neumann 域是具有特征零、但其剩余域具有非零特征的类似对象，因此这个需要更为复杂的构造。为此我们需要一些铺垫。

定理 4.2 (Se13(Thm2.5.3)^[11]). 若 R 是特征为 $p > 0$ 的完备域，则存在一个唯一（取决于同构）的特征为 0 的域 R' ，带有一个赋值 v ，且满足其剩余域为 R ，满足 $v(R') = \mathbb{Z}$, $v(p) = 1 \in \mathbb{Z}$ ，且 R' 关于 v 是完备的。（我们称 R' 的赋值环 A 被称为以 R 为系数的 Witt 向量环。）

例如，若 $R = \mathbb{F}_p$ ，则 $R' = \mathbb{Q}_p$ ，带有 p -进赋值， $A = W(R) = \mathbb{Z}_p$ ，其中 $W(R)$ 是 witt 向量，该定理的详细证明可以参考^[11]。

现在我们就来构造 p 进 Malcev-Neumann 域。设 R 是一个特征为 p 的完美域， G 是一个包含 $\mathbb{Z}$ 作为子群的有序群，（将来我们会令 $v(p) = 1 \in G$ 来定义赋值 v ）。设 A 为赋值域 (R', v') 的赋值环，其中 R' 和 v' 由定理 4.2 给出。

我们希望让函数 d 代表 p ，从而使 $A((G))$ 中的元素形如 $\sum_{g \in G} \alpha_g p^g$ 。因此一些元素如 $-p + d^1$ “应该是”零。因此我们引入理想 $N \subseteq A((G))$ ，将其视为“应该为零”的元素集合，然后取商环 $A((G))/N$ 。

我们称 $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g d^g \in A((G))$ 是一个零级数 (null series)，当且仅当对于所有 $g \in G$ ， $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{g+n} p^n = 0$ 在 R' 中成立。（注意我们在 G 中固定了一个 $\mathbb{Z}$ 的像）。由于对足够负的 n ，有 $\alpha_{g+n} = 0$ ，因为 $\text{supp } \alpha$ 是良序的。另外，由于 $v'(\alpha_{g+n} p^n) \geq n$ ，所以 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{g+n} p^n$ 在 R' 中收敛。记 N 为所有这样的零级数构成的集合。

命题 4.3 (Po93(Prop3)^[12]). 集合 N 是 $A((G))$ 的一个理想。

证明. 显然， N 是一个加法子群。设 $G' \subseteq G$ 是商群 $G/\mathbb{Z}$ 的陪集代表的集合。设 $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g d^g \in A((G))$ ， $\beta = \sum_{h \in G} \beta_h d^h \in N$ ，那么乘积 $\alpha\beta = \sum_{j \in G} \gamma_j d^j$ 。对于每个 $j \in G$ ，

我们有：

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_{j+np^n} = \sum_{\substack{g+h=j+n \\ n \in \mathbb{Z}}} \alpha_g \beta_h p^n = \sum_{\substack{h' \in G' \\ l, m \in \mathbb{Z}}} (\alpha_{j-h'+lp^l}) (\beta_{h'+mp^m})$$

我们令 $h = h' + m$ ，其中 $h' \in G$ 并且令 $l = n - m$ 。由于 $\beta \in N$ ，对于每个 $h' \in G$ ，有

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_{h'+mp^m} = 0,$$

因此对每个 $g \in G$ ，有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_{j+np^n} = 0.$$

(这些无穷级数在 R' 中是合法的，因为对每个 $i \in \mathbb{Z}$ ，只有有限项的赋值小于 i ，且每个 γ_{j+np^n} 是有限个 $\alpha_g \beta_h$ 的和。) 由此可得 N 是一个理想。 $\square$

命题 4.4 (Po93(Prop4)^[12]). 设 $S \subset A$ 是 A 的剩余类的代表元集合，且 $0 \in S$ 。则对于任意元素 $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g d^g \in A((G))$ ，存在唯一的 $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g d^g$ ，使得 $\beta_g \in S$ ，且 $\alpha \equiv \beta \pmod{N}$ 。

证明. 设 $G' \subset G$ 是商群 $G/\mathbb{Z}$ 的陪集代表集合。对于每个 $g \in G'$ ，我们可写：

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{g+np^n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{g+np^n},$$

其中 $\beta_{g+np^n} \in S$ ，由 R' 在离散赋值下是完备的保证，因为有唯一展开。进一步把 β 改写为

$$\beta = \sum_{g \in G'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{g+np^n} d^{g+np^n}$$

是 $A((G))$ 中的良定义元素，因为 $\text{Supp}(\beta) = \text{Supp}(\alpha) + N$ ，且这集合是两个良序集的和，容易知道也是良序的。

最后， $\alpha - \beta \in N$ ，由 N 的定义得证。唯一性也来自于唯一展开。 $\square$

引理 4.5. 若 $\alpha \in R((G))$ 且满足 $v(\alpha) > 0$ ，则 $1 - \alpha$ 是 $R((G))$ 中的一个单位。

可以通过逐项定义级数

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots$$

并验证该级数的支集是良序的，并且它确实是 $1 - \alpha$ 的逆元。关于这种方法的详细证明可参见文献^[13]。

推论 4.6 (Po93^[12]). $L = A((G))/N$ 是一个域。

证明. 由命题4.4, 任意 $\alpha \in A((G))$ 都等价于某个 $\beta \in A((G))$, 使得 $\beta \equiv \alpha \pmod{N}$, 要么 β 为 0 要么该 β 在 $A((G))$ 中是一个首项为单位的元素。由引理4.5 容易知道首项为单位的为可逆元。 $\square$

由上述的性质我们便有了如下的定义：

定义 4.7. p 进 Malcev-Neumann 域为

$$L := A((G))/N.$$

至此我们终于定义出了 p 进 Malcev-Neumann 域。其中, 我们特别的定义如下的域:

定义 4.8. 设 $p \geq 3$ 是某个固定的素数, 构造剩余类域为 $\overline{\mathbb{F}}_p$, 值群为 $\mathbb{Q}$ 的 p 进 Malcev-Neumann 域

$$\mathbb{L}_p := W(\overline{\mathbb{F}}_p)((\mathbb{Q}))/N$$

根据命题 4.4, 任意元素 $f \in \mathbb{L}_p$ 可唯一表示为:

$$f = \sum_{q \in \mathbb{Q}} [r_q] p^q,$$

其中 $[\cdot]: \overline{\mathbb{F}}_p \rightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 是 Teichmüller 表征, $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 是上文提到过的 witt 向量。

并且其支集为

$$\text{supp}(f) := \{q \in \mathbb{Q} \mid r_q \neq 0\}$$

是 $\mathbb{Q}$ 的一个良序子集。因此, $\mathbb{L}_p$ 中的元素 $f = \sum_{q \in \mathbb{Q}} [r_q] p^q$ 完全由其支集与系数所确定。

接下来我们来研究一下 p 进 Malcev-Neumann 域上面的赋值。由命题4.4可知, 我们可以 (尽管略显草率地) 将 L 中的元素唯一表示为:

$$\beta = \sum_{g \in G} \beta_g p^g, \quad \text{其中 } \beta_g \in S.$$

因此, 在给定代表集合 S 后, 我们可以定义 $\beta \in L$ 的支集 $\text{Supp}(\beta)$ 。

定义赋值 $v: L \rightarrow G_\infty$ 为

$$v(\beta) := \min \text{Supp}(\beta).$$

其中 G_∞ 为 $G \cup \infty$ 所定义的偏序集 (这里也是良序集)。

命题 4.9 (Po93(Prop5)^[12]). 映射 v 是 L 上的一个赋值, 并且与代表集合 S 的选择无关。赋值群为 G , 剩余域为 R 。

证明. 对任意 $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g d^g \in A((G))$, 定义

$$w(\alpha) := \min_{g \in G} \left\{ g + v' \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{g+n} p^n \right) \right\}.$$

其中 “min” 取自 $\text{Supp}(\alpha) + N$ 并入 $\{\infty\}$ 后的良序集合, 因此 $w(\alpha)$ 良定义。

若在 α 中加上 N 中的某个元素, 则该值不变。特别地, 如果我们得到一个系数取自 S 的 $\alpha' \in A((G))$, 那么

$$w(\alpha) = w(\alpha') = \min \text{Supp}(\alpha').$$

令 β 为 α 在 L 中的像, 即 $\beta = \alpha + N$, 则定义 $v(\alpha) := w(\beta)$ 。

因为 w 与 S 的选择无关, 所以 v 良定义。设 α', β' 是两个系数在 S 中的代表元, 则有

$$w(\alpha' \beta') = w(\alpha') + w(\beta'),$$

因为 $\alpha' \beta'$ 的首项在 v' 下的赋值为 0 , 也容易得到

$$w(\alpha' \beta') \geq \min\{w(\alpha'), w(\beta')\}$$

因此 v 是一个赋值。

由于对任意 $g \in G$, 都有 $v(p^g) = g$, 所以赋值群为整个 G 。

自然包含 $A \subset A((G))$ 复合商映射 $A((G)) \rightarrow L$, 将 A 映入 L 的赋值环, 其中元素形如 $\sum_{g \geq 0} \alpha_g p^g$ 。因此诱导出从 A 到 L 的剩余域 R 的映射 ϕ , 其作用是取级数 $\sum_{g \geq 0} \alpha_g p^g$ 的常数项: $\phi(\alpha) = \alpha_0$, 因为 L 中的最大理想由 $\sum_{g > 0} \alpha_g p^g$ 构成, 从而映射 ϕ 是满射。其核是 A 的最大理想, 因此诱导出剩余域同构:

$$\bar{\phi}: A/\mathfrak{m} \cong R.$$

□

将该命题应用到 $\mathbb{L}_p$ 上面, 我们就有了如下的推论:

推论 4.10. $\mathbb{L}_p$ 是一个赋值群为 $\mathbb{Q}$, 剩余域为 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 的混合特征赋值域。

接下来我们给一些这个域的一些集合性质：

命题 4.11 (Po93(Prop10)^[12]). 域 $\mathbb{L}_p$ 和 $\mathbb{Q}_p$ 的基数都是 $2^{\aleph_0}$ (因此所有中间域也是如此)。

证明. $\mathbb{L}_p$ 中的每一个级数都定义了一个从 $\mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ 的不同函数, 方法是将 q 映射到 p^q 项的系数的剩余类。这样的函数数目为

$$\overline{\mathbb{F}}_p^{\mathbb{Q}} = 2^{\aleph_0},$$

因此 $|\mathbb{L}_p| \leq 2^{\aleph_0}$ 。另一方面, 众所周知,

$$|\mathbb{Q}_p| = 2^{\aleph_0},$$

□

备注 4.12. 通过幂级数的对比, 我们很容易知道 $\mathbb{L}_p$ 应该严格包含 $\mathbb{C}_p$ 虽然从上面的命题来看两者都是完备的代数闭 ($\mathbb{L}_p$ 的完备性见下一节) 的大小为 $2^{\aleph_0}$ 的集合。不过我们事实上可以得到如下的结论, 参考^[12] 域 $\mathbb{L}_p$ 相对于 $\mathbb{C}_p$ 的超越次数为 $2^{\aleph_0}$ 。从而可以看到 $\mathbb{L}_p$ 会比 $\mathbb{C}_p$ 大许多。

5 p 进 Malcev-Neumann 域的极大性

本节我们将着重来研究一下 p 进 Malcev-Neumann 域的极大性。

定义 5.1. 设 F 是一个带有赋值 v' 的域, 若满足下列条件, 则称 F 是带有赋值 v 的域 K 的一个即时扩张 (immediate extension):

1. F/K 是域的扩张;
2. v' 是 v 的延拓;
3. $v'(F^*) = v(K^*)$;
4. (F, v') 的剩余类域等于 (K, v) 的剩余类域。

若 (K, v) 不存在真即时扩张, 则称其是极大完备的 (maximally complete)。

我们有如下的基础性质:

命题 5.2 (Po93(Prop6)^[12]). 1. 极大完备域是完备的;

2. 若一个极大完备域的赋值群是可除的, 且其剩余域是代数封闭的, 则该域本身也是代数封闭的。

证明. 1. 完备化 $\widehat{F}$ 是 F 的一个即时扩张, 因此 $\widehat{\widehat{F}} = \widehat{F}$ 。

2. 在此情形下, F 的代数闭包 $\overline{F}$ 也是 F 的一个即时扩张, 因此 $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$ 。

□

备注 5.3. 1. 上述证明中关于即时扩张的证明部分可以参考文献^[14]

2. 该命题的证明归功于 MacLane, 但它不是构造性的, 即它并没有给出一种算法来构造某个多项式在 F 上的根;

备注 5.4. 事实上我们有如下的定理: 对任意带广义赋值 v 的域 K , 至少存在一个极大完备的即时扩张。该结论对非阿基米德赋值域同样成立。但是这并没有通常完备性的唯一性。

设域 K 带有一个非阿基米德赋值 $|\cdot|$, 其赋值群为 $|K^*|$, 剩余类域为 k 。若 $\text{char}(k) = p > 0$, 则称假设 A 成立, 当且仅当满足以下两个条件:

1. 任意形如

$$x^{p^n} + a_1 x^{p^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x^p + a_n x + a_{n+1} = 0$$

的方程 (其中系数 $a_i \in k$) 在 k 中有根;

2. $|K^*| = (|K^*|)^p$ 。

Kaplansky 在文献^[15] 中指出: 存在赋值域不满足假设 A , 其具有两个不互同构的即时极大完备扩张。

备注 5.5. Kedlaya 通过一个超限牛顿算法 (transfinite Newton algorithm) 证明了 $\mathbb{L}_p$ 的代数闭性。

设 $P(T) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} T^i \in \mathbb{L}_p[T]$ 是一个非常数多项式, 记 $\text{Newt}(P)$ 为 P 的牛顿多边形 (Newton Polygon), 即凸包的下边界, 其顶点为点 $(i, v_p(a_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。我们记 $s_{\max}^P$ 为 $\text{Newt}(P)$ 中斜率最大的线段的斜率, $m_{\max}^P$ 为该线段的左端点。

定义 P 的剩余多项式 (residue polynomial) 为:

$$\text{Res}_P(T) := \sum_{k=0}^{n-m_{\max}^P} C_{v_p(a_m)+s_{\max}^P(n-m_{\max}^P-k)}(a_{n-k})T^k,$$

其中 $C_s : L_p \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ 是给定映射, 定义为 $C_s \left(\sum_{q \in \mathbb{Q}} \zeta_q p^q \right) = \zeta_s$.

可以参考文献^[16-17]。进一步这些文献整理了一个以上算法的伪代码如下:

算法 5.1 Transfinite Newton Algorithm for $\mathbb{L}_p$

Require: 非零多项式 $P(T) \in \mathbb{L}_p[T]$

Ensure: $P(T)$ 的一个根 $r \in \mathbb{L}_p$

- 1: $r \leftarrow 0, \Phi(T) \leftarrow P(T)$ {初始值设为 $P(T)$ }
 - 2: **while** $\Phi(T) \neq 0$ **do**
 - 3: 设 c 为 $\text{Res}_{\Phi}(T)$ 在 $\mathbb{F}_p$ 中的任意一个根
 - 4: $r \leftarrow r + [c] \cdot p^{s_{\max}^{\Phi}}$
 - 5: $\Phi(T) \leftarrow \Phi(T) + [c] \cdot p^{s_{\max}^{\Phi}}$
 - 6: **end while**
 - 7: **return** r
-

定理 5.6 (Po93(Thm1)^[12]). *Malcev-Neumann* 域与 p 进 *Malcev-Neumann* 域 L 都是极大完备的。

为了证明这个定理我们需要如下几个引理:

引理 5.7 (Po93(lemma3)^[12]). 设 $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g p^g$ 、 $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g p^g$, 其中 $\alpha_g, \beta_g \in S$, 并且 α, β 是 L 中的两个元素。则有

$$v(\alpha - \beta) = \min \{g \in G \mid \alpha_g \neq \beta_g\}.$$

(对通常的 *Malcev-Neumann* 域, 该结论是显然的。)

证明. 令 w 为上一命题中所用的赋值映射。

设 $\alpha' = \sum_{g \in G} \alpha_g t^g$ 、 $\beta' = \sum_{g \in G} \beta_g t^g$, 它们是 $A((G))$ 中的表示。于是

$$v(\alpha - \beta) = w(\alpha' - \beta').$$

设

$$g_0 := \min \{g \in G \mid \alpha_g \neq \beta_g\},$$

那么 $\alpha' - \beta'$ 的首项是 $(\alpha_{g_0} - \beta_{g_0})t^{g_0}$ 。

由于 $\alpha_{g_0}, \beta_{g_0}$ 属于不同的剩余类，其差在 v' 下的赋值为 0，故

$$w(\alpha' - \beta') = g_0,$$

即得证。 □

引理 5.8 (Po93(lemma4)^[12]). 设 (F, v) 是赋值群为 G 的赋值域。考虑一组形如 $v(x - a_\sigma) \geq g_\sigma$ 的不等式系统，其中 $a_\sigma \in F$, $g_\sigma \in G$, $\sigma \in I$ 为某个指标集。则有：

1. 如果该系统在 F 中有解 x ，那么对任意 $\sigma_1, \sigma_2 \in I$ ，有

$$v(a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}) \geq \min\{g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}\}.$$

2. 若进一步假设 $F = L$ (或 K) 为某个 *Malcev-Neumann* 域，则上述条件的逆命题也成立：即若对所有 $\sigma_1, \sigma_2 \in I$ ，有

$$v(a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}) \geq \min\{g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}\},$$

则该不等式系统有解。

证明. (1) 是三角不等式的直接推论。

(2) 假设对所有 $\sigma_1, \sigma_2 \in I$ 有

$$v(a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}) \geq \min\{g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}\}.$$

对每个 $g \in G$ ，记 x_g 为在某个 a_σ 中 p^g 的系数（满足 $g_\sigma > g$ ）。若无此类 σ ，则设 $x_g = 0$ 。我们断言：每个 x_g 都定义良好且唯一。

若 $g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2} > g$ ，则由 $v(a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}) > g$ 及引理 5.7 可知， $a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}$ 中 p^g 的系数相等。

设 $x := \sum_{g \in G} x_g p^g$ 。为证 $x \in L$ ，需说明 $\text{Supp}(x)$ 良序。反设存在严格递减列 $h_1, h_2, \dots$ ，使得 $h_n \in \text{Supp}(x)$ 对所有 n 。

由于 x_g 的定义, 存在某个 $\sigma \in I$, 使得 $h_1 < g_\sigma$, 而 $h_n \in \text{Supp}(a_\sigma)$ 对所有 $n \geq 1$, 导致矛盾。故 $\text{Supp}(x)$ 良序, 从而 $x \in L$ 。

从定义可知, 对于所有 $\sigma \in I$, 有:

$$v(x - a_\sigma) \geq g_\sigma.$$

证毕。 □

证明. 我们只讨论 p -进情形。等特征的情形可以参考文献^[18], 事实上 Krull 的证明方法对 p -进情形 L 同样适用。

设 (M, w) 是 (L, v) 的一个真即时扩张。取 $\mu \in M \setminus L$ 。考虑一组不等式系统 $w(x - a_\sigma) \geq g_\sigma$, 其中 a_σ 在 L 中取遍, 且定义 $g_\sigma := w(\mu - a_\sigma)$ 。

显然 μ 是该系统在 M 中的一个解, 因此根据引理5.8的第 (1) 部分, 对于任意 σ_1, σ_2 , 有

$$w(a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}) \geq \min\{g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}\}.$$

又由于 $v(a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}) = w(a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}) \geq \min\{g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}\}$, 我们可以应用引理5.8的第 (2) 部分, 得到该组不等式系统

$$v(x - a_\sigma) \geq g_\sigma$$

在 L 中有解 λ 。

我们设想 λ 是 μ 在 L 中的最佳近似。接下来我们通过“主项 (leading term)”构造出比 λ 更接近 μ 的元素, 从而导致矛盾。

由于 $\mu \notin L$, 且 $\mu - \lambda \neq 0$, 我们设

$$g := w(\mu - \lambda) \in G.$$

(这里用到了 L 与 M 有相同的赋值群。)

于是 $w(p^{-g}(\mu - \lambda)) = 0$, 所以存在唯一的代表元 $s \in S$, 使得其非零剩余类包含 $p^{-g}(\mu - \lambda)$ 。(这里用到了 L 与 M 有相同的剩余域。)

因此有

$$w(p^{-g}(\mu - \lambda - s)) > 0, \quad \text{即} \quad w(\mu - \lambda - sp^g) > g.$$

另一方面，定义

$$g = v(-sp^g) = v(\lambda - (\lambda + sp^g)) \geq w(\mu - (\lambda + sp^g)),$$

由此构成矛盾，使用 $a_\sigma = \lambda + sp^g$ 。

这个矛盾表明 L 是极大完备的。 □

因此我们有如下的，关于 $\mathbb{L}_p$ 的性质的描述：

推论 5.9. $\mathbb{L}_p$ 是一个完备的代数闭的混合特征赋值域。

进一步对于极大完备与球完备我们有如下的关系：

定理 5.10 (NL71^[19]). 设 $(K, |\cdot|)$ 是一个非阿基米德赋值域，则下列命题等价：

- $(K, |\cdot|)$ 是极大完备的；
- $(K, |\cdot|)$ 是伪完备的；
- $(K, |\cdot|)$ 是球面完备的。

其中引入了一个伪完备的概念，这个概念主要是因为这个定理的证明是证明球面完备与伪完备等价和极大完备与伪完备等价。具体可以参考文献^[19]。其中伪完备的定义如下：

定义 5.11. 设 K 为一域， $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个非阿基米德赋值， $v: K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ 为一个一般赋值，其中 G 是一个阿贝尔有序群。

若良序集合 $\{x_\rho\} \subset K$ 无最大元，称其为一个关于 v 的伪-Cauchy 列 (Pseudo-Cauchy)，如果对任意 $\tau > \rho$ ，都有

$$v(x_\sigma - x_\rho) < v(x_\tau - x_\rho).$$

一个数列 (x_n) 被称为关于 $|\cdot|$ 的伪-Cauchy 列 (Pseudo-Cauchy)，如果存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ ，使得当 $n > m > k \geq n_0$ 时，有

$$|x_n - x_m| < |x_m - x_k|.$$

注意：序列 (x_n) 关于 $|\cdot|$ 是伪-Cauchy 的，当且仅当在赋值 $v(x) = -\ln|x|$ 下最终为伪-Cauchy。

定义 5.12. 设 K 为域, $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}$ 为非阿基米德赋值, $v: K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ 为一般赋值。

若对所有 ρ , 有 $v(a - x_\rho) = \gamma_\rho := v(x_{\rho+1} - x_\rho)$, 则称 $a \in K$ 为伪-Cauchy 集 $\{x_\rho\}$ 的一个伪极限 (pseudo-limit)。

若 (x_n) 是伪-Cauchy 数列, 且存在 $a \in K$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对所有 $n \geq n_0$, 有

$$|a - x_n| = |x_{n+1} - x_n|,$$

则称 a 为该数列的一个伪极限 (pseudo-limit)。

定义 5.13. 设 K 为一域, $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}$ 是非阿基米德赋值, $v: K \rightarrow G \cup \{\infty\}$ 是一个广义赋值, 其中 G 是有序阿贝尔群。若 K 的每一个伪柯西集合 (相对于 v) 在 K 中都有伪极限, 则称 (K, v) 是伪完备的 (pseudo-complete)。若 K 的每一个伪柯西列 (相对于 $|\cdot|$) 在 K 中都有伪极限, 则称 $(K, |\cdot|)$ 是伪完备的 (pseudo-complete)。

6 p 进 Malcev-Neumann 域的进一步性质

我们可以给出一个 $\mathbb{L}_p$ 的元素是否属于 $\mathbb{Q}_p^a$ 的一个必要条件: $\mathbb{L}_p$ 中的某个数列, 其支集属于 $\frac{1}{N}\mathbb{Z}[1/p]$ (其中 N 为某个正整数), 且所有系数映入剩余类域后属于某个有限域 $\mathbb{F}_q$ 。证明可以自然类比幂级数域去看, 具体可以参考^[12]。有了这个必要性条件后, 我们很自然会去看满足这样条件的域有什么性质, 自然会有如下的定义。

定义 6.1. 设 $f = \sum_{q \in \mathbb{Q}} [r_q] p^q \in \mathbb{L}_p$ 。若满足以下两点, 我们称 f 是一个超代数 (hyperalgebraic) 元素:

1. 存在正整数 N , 使得 $\text{supp}(f) \subseteq \frac{1}{N}\mathbb{Z}[1/p]$;
2. 存在正整数 k , 使得对所有 $q \in \text{supp}(f)$, 均有 $r_q \in \mathbb{F}_{p^k}$ 。

记 $\mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 为 $\mathbb{L}_p$ 中所有超代数元素的集合。集合 $\mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 构成一个代数闭域。因此, 所有 p 进代数数均为超代数元素, 即 $\overline{\mathbb{Q}_p} \subseteq \mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 。可以参考^[12,20]

定理 6.2 (WY24(Thm3.3)^[17]). 域 $\mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 严格大于 $\overline{\mathbb{Q}_p}$, 且它既不完备, 也不是 $\mathbb{C}_p$ 的子域。

证明. 考虑数列 $(\sum_{k=1}^n p^{k-1/k})_{n \geq 1}$, 它在 $\overline{\mathbb{Q}}_p \subseteq \mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 中收敛于 $\mathbb{C}_p$ 。然而, 其极限 $\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1/k}$ 在 $\mathbb{L}_p$ 中并非超代数, 因为其支集的 p -阶无关部分的分子无界。这表明 $\mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 不完备, 且不包含 $\mathbb{C}_p$ 。

为进一步说明 $\mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 不包含 $\mathbb{C}_p$, 可考虑以下元素:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} p^{\frac{\sqrt{2} \cdot p^k}{p^k}}.$$

若 $\alpha \in \mathbb{C}_p$, 则存在某个 p -进代数数 $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}_p$, 使得 $v_p(\alpha - \beta) > 2$ 。这说明 β 在 $\mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 中的标准展开可以写作:

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} p^{\left\lfloor \frac{\sqrt{2} \cdot p^k}{p^k} \right\rfloor} + \text{更大指数的项} \dots$$

因此 $\text{supp}(\beta)$ 有一个聚点 $\sqrt{2}$ 。但这不可能: Lampert 指出^[20], 集合

$$\mathcal{A} := \{\alpha \in \mathbb{L}_p \mid \{\text{支集的聚点}\} \subset \mathbb{Q}\}$$

是一个代数闭域。由于每一个 p -进有理数的支集都落在 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, 所以 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 是 $\mathcal{A}$ 的子域。但另一方面, $\beta \notin \mathcal{A}$ 。这就产生了矛盾。 $\square$

除此之外, Wang Shanwen 和 Yuan Yijun 在同一篇^[17]论文中指出, 可以在上面定义超代数不变量, 具体如下:

定义 6.3. 设 $\theta = \sum_{q \in \mathbb{Q}} [r_q] p^q \in \mathbb{L}_p^{\text{ha}}$ 是 $\mathbb{L}_p$ 中的一个超代数元素。

1. 记 $\mathfrak{T}_{\theta}$ 为满足 $\text{supp}(\theta) \subseteq \frac{1}{e}\mathbb{Z}[1/p]$ 的最小正整数 e 。我们称其为超驯化指数 (hyper-tame index)。
2. 记 $\mathfrak{I}_{\theta}$ 为使得对所有 $q \in \text{supp}(\theta)$ 有 $r_q \in \mathbb{F}_{p^f}$ 成立的最小正整数 f 。我们称其为超惯性指数 (hyper-inertia index)。

我们将上述两个量称为 θ 的超代数不变量 (hyper-algebraic invariants)。

关于超代数不变量的研究可以参考^[17], 可以看到这部分的研究还有许多地方可以深入, 除了代数方面, 分析方面的进展就相对薄弱些, 如下:

命题 6.4. 存在唯一函数 $\log_p : \mathbb{L}_p^* \rightarrow \mathbb{L}_p$, 使得:

1. $\log_p x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad \text{当 } v(x-1) > 0;$
2. $\log_p(xy) = \log_p x + \log_p y, \quad \text{对所有 } x, y \in \mathbb{L}_p^*;$
3. $\log_p p = 0.$

证明. 对 $\mathbb{L}_p$ 的证明与对 $\mathbb{C}_p$ 的证明完全一致。可以参考^[21-22] □

除此之外, 我们对于球完备的超距空间有着许多分析的性质, 例如我们有超度量 **Hahn-Banach** 定理如下

定理 6.5 (Ingleton). 设 E 是定义在一个球面完备赋值域 K 上的赋范空间, $D \subseteq E$ 是其线性子空间, 且 $f: D \rightarrow K$ 是一个连续线性函数。则 f 可以延拓为一个连续线性函数 $\bar{f}: E \rightarrow K$, 满足 $\|\bar{f}\| = \|f\|$ 。

证明. 利用 **Zorn** 引理, 只需考虑 $E = D \oplus \langle a \rangle$, 其中 $a \notin D$ 。我们所需构造的延拓 $\bar{f}$ 应满足: 对任意 $\lambda \in K, d \in D$, 有

$$|\bar{f}(\lambda a + d)| \leq \|f\| \cdot \|\lambda a + d\|.$$

换句话说, 我们需要找到一个元素 $w = \bar{f}(a) \in K$, 使得对所有 $d \in D$:

$$|w - f(d)| \leq \|f\| \cdot \|a - d\|.$$

即:

$$w \in \bigcap_{d \in D} B_{f(d)}(\|f\| \cdot \|a - d\|),$$

其中 $B_{f(d)}(r)$ 表示 K 中以 $f(d)$ 为中心、 r 为半径的闭球。

为了证明该交集非空, 利用球面完备性, 只需验证对任意 $d, d' \in D$, 有:

$$B_{f(d)}(\|f\| \cdot \|a - d\|) \cap B_{f(d')}(\|f\| \cdot \|a - d'\|) \neq \emptyset.$$

而这一点可由下式推出:

$$|f(d) - f(d')| \leq \|f\| \cdot \|d - d'\| \leq \|f\| \cdot \max(\|d - a\|, \|a - d'\|).$$

□

备注 6.6. 关于 **Ingleton** 定理，有以下补充说明：

1. 若 $f \neq 0$ 且 D 在 E 中非稠密，则上述意义下对 f 的延拓不唯一。可以参考^[2]
2. 若将赋值域 K 替换为非球面完备域，则 **Ingleton** 定理不再成立。更多内容见^[5]；
3. **HB** 与 **Ingleton** 都由 **AC** 推出。但 **Ingleton** 并不反推出 **AC**。在不依赖选择公理的集合论系统（例如 **ZFA**）中，**Ingleton** 引理依然成立，且若进一步假设 **MC**(p) 可证明出整个 **Ingleton** 定理。具体可以参考^[23]。

7 参考文献

- [1] MILNE J S. Algebraic Number Theory (v3.00)[Z]. Available at www.jmilne.org/math/. 2008.
- [2] SCHIKHOF W H. Ultrametric Calculus: An Introduction to p-Adic Analysis[M]. Cambridge University Press, 1985.
- [3] BARRIA-COMICHEO A, SHAMSEDDINE K. Summary on non-Archimedean valued fields[J]. 2018, 704: 1-36. DOI: 10.1090/conm/704/14158.
- [4] EISENBUD D. Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry: vol. 150[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] TAIBLESON M. ACM Van Rooij, Non-Archimedean functional analysis[J]. 1979.
- [6] ALLING N L. Foundations of analysis over surreal number fields: vol. 141[M]. Elsevier, 1987.
- [7] DICKMANN M. H. Garth Dales and W. Hugh Woodin. Super-real fields. Totally ordered fields with additional structure. London Mathematical Society monographs, ns no. 14. Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, New York, etc., 1996, xv+ 357 pp.[J]. Bulletin of Symbolic Logic, 2000, 6(2): 218-221.
- [8] HAHN H. Über die nichtarchimedischen Größensysteme[G]//Hans Hahn Gesammelte Abhandlungen Band 1/Hans Hahn Collected Works Volume 1. Springer, 1995: 445-499.
- [9] SCHILLING O F G. The theory of valuations: vol. 4[M]. American Mathematical Soc., 1950.
- [10] ESCASSUT A, PEREZ-GARCIA C, SHAMSEDDINE K. Advances in Ultrametric Analysis: vol. 704 [M]. American Mathematical Soc., 2018.
- [11] SERRE J P. Local fields: vol. 67[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] POONEN B. Maximally complete fields[J]. Enseign. Math, 39(1-2): 87-106.
- [13] PASSMAN D S. The algebraic structure of group rings[M]. Courier Corporation, 2011.
- [14] BOURBAKI N. Commutative Algebra, Hermann[J]. Paris and Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.
- [15] KAPLANSKY I. Maximal fields with valuations[J]. 1942.
- [16] WANG S, YUAN Y. Truncated expansion of ζ_{p^n} in the p -adic Mal'cev-Neumann field[EB/OL]. 2023. <https://arxiv.org/abs/2111.07127>. arXiv: 2111.07127 [math.NT].
- [17] WANG S, YUAN Y. Hyper-algebraic invariants of p -adic algebraic numbers[EB/OL]. 2024. <https://arxiv.org/abs/2402.15947>. arXiv: 2402.15947 [math.NT].
- [18] KRULL W. Allgemeine Bewertungstheorie.[J]. 1932.
- [19] NARICI L. Functional analysis and valuation theory: vol. 5[M]. CRC Press, 1971.
- [20] LAMPERT D. Algebraic p -adic expansions[J]. 1986.
- [21] KOBLITZ N. p -adic Numbers, p -adic Analysis, and Zeta-Functions: vol. 58[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] WASHINGTON L C. Introduction to cyclotomic fields: vol. 83[M]. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] MORILLON M. Ingleton's theorem and the Axiom of Choice[C]//33rd Summer Conference on Topology and its Applications. 2018.